

Laboratorium Podstaw Robotyki

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

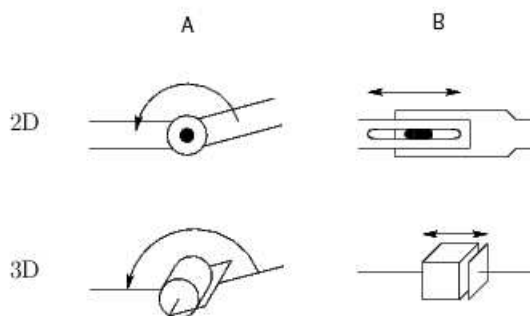
ĆWICZENIE 5

ROTACJE 3D, TRANSFORMACJE JEDNORODNE I KINEMATYKA MANIPULATORÓW.

Celem ćwiczenia jest analiza wybranych sposobów reprezentacji obrotów układów współrzędnych w przestrzeni 3D, analiza własności macierzy rotacji oraz transformacji jednorodnych, a także analiza rozwiązania zadania prostego i odwrotnego kinematyki dla manipulatorów w postaci otwartych szeregowych łańcuchów kinematycznych. Podczas realizacji ćwiczenia wykorzystany będzie pakiet Robotics Toolbox pozwalający na obliczenia kinematyczne w środowisku Matlab.

Manipulatory robotów o otwartych łańcuchach kinematycznych można rozważać jako układ składający się z ciągu sztywnych ogniw połączonych za pomocą przegubów (złączy). Przeguby stanowią ruchome połączenia pomiędzy sąsiadującymi ogniwami w łańcuchu. Zazwyczaj są to złącza o jednym stopniu swobody (1-DOF - z ang. *Degree Of Freedom*) w postaci osi obrotu (przeguby obrotowe) lub osi przesuwu (przeguby przesuwne lub inaczej pryzmatyczne). Symboliczne oznaczenia obu typów złączy zamieszczono na rys. 1. W ogólności, złącza o n stopniach swobody, (n -DOFs), można modelować jako układ n przegubów 1-DOF, łączących $n - 1$ ogniw o zerowej długości. Liczba przegubów holonomicznych manipulatorów przemysłowych odpowiada liczbie stopni swobody całego mechanizmu. W robotach przemysłowych najczęściej stosuje się 6 przegubów, co umożliwia osiągnięcie pozycji końcówki roboczej w 3D z dowolną orientacją wewnątrz przestrzeni roboczej manipulatora (z dala od ograniczeń w przestrzeni złączy).

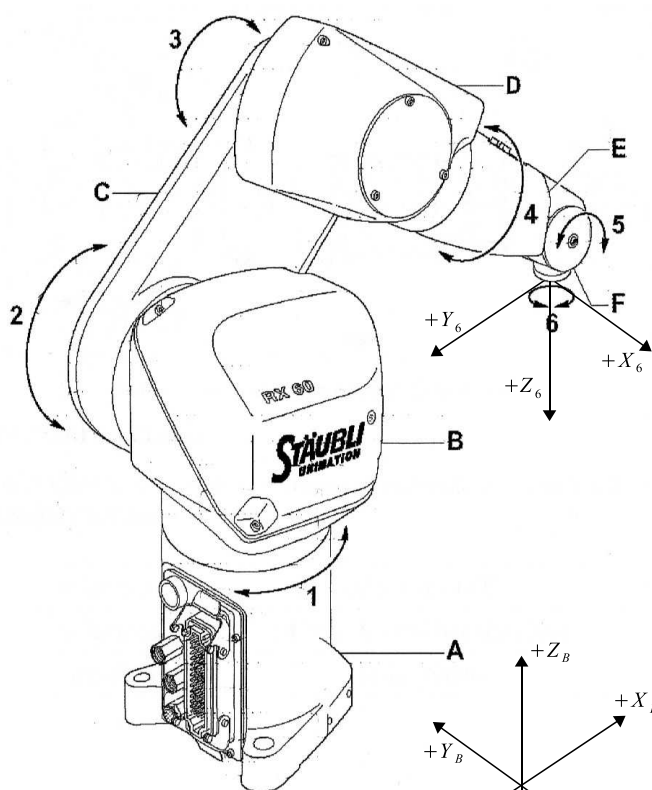
Jednoznaczna lokalizacja końcówki roboczej manipulatora w przestrzeni zadania (w globalnym



Rys. 1: Symboliczna reprezentacja przegubów manipulatora: obrotowego (A), przesuwne (B).

układzie $\{B\}$ przestrzeni kartezjańskiej) wymaga zdefiniowania i przywiązania układu współrzędnych do wyróżnionego punktu końcówki. Przyjmijmy, że układ ten związany jest ze środkiem kołnierza ostatniego ogniwa manipulatora, a oś Z tego układu zorientowana jest wzdłuż kierunku

natarcia (podjazdu) narzędzia robota (patrz rys. 2). Pozycję początku układu końcówki wyrażoną w układzie $\{B\}$ oznaczamy za pomocą wektora $\mathbf{p}_6^B \triangleq [p_{6x}^B \ p_{6y}^B \ p_{6z}^B]^T$, a orientację osi tego układu względem osi układu $\{B\}$ za pomocą ortonormalnej macierzy rotacji $\mathbf{R}_6^B \triangleq [\mathbf{n}_6^B \ \mathbf{o}_6^B \ \mathbf{a}_6^B]$. Reprezentacja pozycji układu końcówki jest jednoznaczna i oczywista jako uporządkowana trójka liczb reprezentujących współrzędne p_x, p_y oraz p_z punktu będącego środkiem układu końcówki względem poszczególnych osi ortokartezjańskiego układu $\{B\}$. Reprezentacja orientacji natomiast może wynikać z różnych konwencji opisu obrotów osi układu końcówki względem osi układu $\{B\}$. Wybrane reprezentacje orientacji oraz analiza własności macierzy rotacji są przedmiotem dalszej części ćwiczenia.



Rys. 2: Manipulator przemysłowy z przywiązanym układem współrzędnych końcówki roboczej.

1 Rotacje w 3D i ich reprezentacje

Oznaczmy przez $\{B\}$ oraz $\{A\}$ dwa kartezjańskie układy współrzędnych o wspólnym początku w punkcie O i ortogonalnych wersorach osi tych układów: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (dla układu $\{B\}$) oraz $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ (dla układu $\{A\}$) skierowanych odpowiednio wzdłuż osi X, Y i Z . Przyjmijmy że pierwszy układ współrzędnych jest bazowym układem odniesienia, natomiast drugi może się dowolnie obracać względem niego. Dla lepszego zobrazowania założmy, że układ $\{A\}$ jest na stałe związany z bryłą sztywną umocowaną w punkcie O . Orientację układu $\{A\}$ względem układu $\{B\}$ możemy zapisać za pomocą następujących równań:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{o} = o_x \mathbf{i} + o_y \mathbf{j} + o_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

gdzie n_x, n_y, n_z stanowią składowe wersora \mathbf{n} wzdłuż odpowiednich osi układu $\{B\}$. Powyższe równania można zapisać w postaci następującej ortonormalnej macierzy rotacji:

$$\mathbf{R}_A^B = [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \mathbf{i} & \mathbf{o}^T \mathbf{i} & \mathbf{a}^T \mathbf{i} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{j} & \mathbf{o}^T \mathbf{j} & \mathbf{a}^T \mathbf{j} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{k} & \mathbf{o}^T \mathbf{k} & \mathbf{a}^T \mathbf{k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (1)$$

Powyższa macierz może być interpretowana na trzy sposoby [4]:

- jako reprezentacja orientacji osi układu $\{A\}$ względem osi układu $\{B\}$,
- jako operator obrotu wektora \mathbf{d} w nowy wektor $\mathbf{R}\mathbf{d}$ w tym samym układzie współrzędnych,
- jako operator przekształcenia współrzędnych punktu \mathbf{d}^A we współrzędne w układzie $\{B\}$ (po uzgodnieniu początków układów $\{A\}$ i $\{B\}$).

Macierz rotacji (1) jest nadmiarową (redundantną) reprezentacją rotacji. Minimalna reprezentacja rotacji w przestrzeni 3D składa się z trzech niezależnych parametrów zwanych kątami Eulera odpowiadających złożeniu sekwencji trzech elementarnych obrotów układu $\{A\}$ względem wybranych osi w przestrzeni. Reprezentacja taka zwana jest także lokalną parametryzacją grupy $SO(3)$, której elementami są macierze rotacji¹. Opis taki nie jest jednoznaczny - istnieje dwanaście różnych zbiorów kątów Eulera odpowiadających możliwym sekwencjom rotacji elementarnych. W robotyce najbardziej popularne są następujące dwie kowencje:

1. **kąty XYZ** (zwane kątami RPY z ang. *Roll-Pitch-Yaw* – kołysanie boczne, kołysanie wzdłużne, zbaczanie): wyjściowa macierz rotacji \mathbf{R}_A^B wynika ze złożenia następującej sekwencji obrotów realizowanych wokół osi **ustalonego układu odniesienia** $\{B\}$: obrót o kąt ψ wokół osi X_B , obrót o kąt ϑ wokół osi Y_B , obrót o kąt φ wokół osi Z_B :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A^B &\stackrel{\text{RPY}}{=} \mathbf{R}_{AZ_B}(\varphi) \mathbf{R}_{AY_B}(\vartheta) \mathbf{R}_{AX_B}(\psi) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \vartheta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

2. **kąty ZYZ** (zwane kątami precesji, nutacji, obrotu własnego): wyjściowa macierz rotacji \mathbf{R}_A^B wynika ze złożenia następującej sekwencji obrotów realizowanych wokół osi **bieżącego układu odniesienia** $\{A\}$: obrót o kąt φ wokół osi Z_A , obrót o kąt ϑ wokół osi $Y_{A'}$, obrót o kąt ψ wokół osi $Z_{A''}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A^B &\stackrel{\text{ZYZ}}{=} \mathbf{R}_{AZ_A}(\varphi) \mathbf{R}_{AY_{A'}}(\vartheta) \mathbf{R}_{AZ_{A''}}(\psi) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

¹Chodzi tutaj o grupę w sensie struktury algebraicznej. Symbol $SO(3)$ oznacza grupę specjalnych macierzy ortogonalnych o wymiarze 3×3 (z ang. *Special Orthogonal Group*)

Z macierzami rotacji związane są dwa podstawowe zadania parametryzacji:

- P1. zadanie proste parametryzacji orientacji DParO** – polega na obliczeniu macierzy \mathbf{R}_A^B dla zadanych kątów Eulera φ, ϑ, ψ (czyli dla zadanych parametrów) definiujących elementarne obroty osi układu końcówki roboczej manipulatora:

$$\text{DParO: } \varphi, \vartheta, \psi \mapsto \mathbf{R}_A^B; \quad (6)$$

zadanie proste można rozwiązać podstawiając wartości kątów Eulera do jednej z ogólnych postaci macierzy (3) lub (5) (w zależności od przyjętej konwencji opisu),

- P2. zadanie odwrotne parametryzacji orientacji IParO** – polega na znalezieniu kątów Eulera φ, ϑ, ψ (czyli wartości parametrów) pozwalających na realizację zadanej macierzy rotacji (orientacji) \mathbf{R}_A^B układu końcówki roboczej:

$$\text{IParO: } \mathbf{R}_A^B \mapsto \varphi, \vartheta, \psi; \quad (7)$$

zadanie to rozwiązujemy poprzez porównanie odpowiednich elementów zadanej macierzy \mathbf{R}_A^B z odpowiednimi elementami ogólnej postaci macierzy rotacji (3) lub (5) (w zależności od przyjętej konwencji opisu).

Rozwiązanie zadania parametryzacji odwrotnej orientacji przedstawiono w pracach [3, 4]. Do obliczeń związanych z parametryzacją prostą i odwrotną orientacji (w konwencji RPY oraz ZYZ) służą cztery funkcje pakietu *Robotics Toolbox* o nazwach: `eul2tr`, `tr2eul` oraz `rpy2tr`, `tr2rpy`. Ich opis można znaleźć w dokumentacji [2] lub w pomocy podręcznej środowiska Matlab.

- 1.1 Zapoznać się z opisem następujących funkcji pakietu *Robotics Toolbox*: `rotx`, `roty`, `rotz`, `eul2tr`, `rpy2tr`, `tr2eul`, `tr2rpy` (patrz [2, 1]).

- 1.2 Korzystając z funkcji `rotx`, `roty`, `rotz` utworzyć macierz rotacji:

$$\mathbf{R}_3^0 \triangleq \mathbf{R}_Z(-\pi/3) \mathbf{R}_Y(\pi/6) \mathbf{R}_X(-\pi/4) \quad (8)$$

oraz podać dwie interpretacje tak utworzonej macierzy z punktu widzenia osi, wokół których realizowane są obroty składowe i kolejności ich realizacji. Zwizualizować orientację układu {3} w układzie zerowym za pomocą funkcji `tr3d`.

- 1.3 Na przykładzie macierzy \mathbf{R}_3^0 numerycznie sprawdzić następujące własności macierzy rotacji:

- $\det(\mathbf{R}) = +1$ (dla układów prawoskrętnych),
- $\mathbf{R}^{-1} \equiv \mathbf{R}^T$,
- $\mathbf{n}^T \mathbf{o} = \mathbf{o}^T \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{n} \equiv 0$,
- $\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{o}\| = \|\mathbf{a}\| = 1$,
- $\mathbf{n} \times \mathbf{o} = \mathbf{a}$, $\mathbf{o} \times \mathbf{a} = \mathbf{n}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{n} = \mathbf{o}$,

gdzie $\mathbf{R} \equiv [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}]$.

- 1.4 Napisać definicję macierzy rotacji \mathbf{R}_{3u}^0 w reprezentacji **ZYZ** definiującą układ współrzędnych $\{3\}$ jako złożenie następującej sekwencji obrotów realizowanych względem osi **układu ustalonego** (tu: układu $\{0\}$):

A1. obrót wokół osi Z o kąt $\phi = \frac{\pi}{2}[\text{rad}]$,

A2. obrót wokół osi Y o kąt $\vartheta = \frac{\pi}{2}[\text{rad}]$,

A3. obrót wokół osi Z o kąt $\psi = -\pi[\text{rad}]$.

Naszkieować układ $\{0\}$, układ $\{3\}$ i wszystkie układy pośrednie związane z obrotami składowymi. Na podstawie wykonanego rysunku napisać postać wynikowej macierzy rotacji \mathbf{R}_{3u}^0 .

- 1.5 Korzystając z funkcji `rotz`, `roty`, `rotx` obliczyć macierz rotacji \mathbf{R}_{3u}^0 i porównać ją z wyprowadzoną wyżej postacią. Zwizualizować orientację układu $\{3\}$ w układzie zerowym za pomocą funkcji `tr3d`.

- 1.6 Powtórzyć wszystkie powyższe operacje przyjmując teraz, że macierz \mathbf{R}_{3b}^0 wynika ze złożenia obrotów A1-A3 względem osi **układów bieżących**. Wynik sprawdzić korzystając z funkcji `eul2tr`. Porównać otrzymaną macierz obrotu \mathbf{R}_{3b}^0 z macierzą \mathbf{R}_{3u}^0 . Zwizualizować orientację otrzymanego układu $\{3\}$ w układzie zerowym za pomocą funkcji `tr3d`.

- 1.7 Napisać definicję macierzy rotacji \mathbf{R}_{3u}^0 w reprezentacji **XYZ** definiującą układ współrzędnych $\{3\}$ jako złożenie następującej sekwencji obrotów realizowanych względem osi **układu ustalonego** (tu: układu $\{0\}$):

B1. obrót wokół osi X o kąt $\phi = \frac{\pi}{2}[\text{rad}]$,

B2. obrót wokół osi Y o kąt $\vartheta = \frac{\pi}{2}[\text{rad}]$,

B3. obrót wokół osi Z o kąt $\psi = -\pi[\text{rad}]$.

Naszkieować układ $\{0\}$, układ $\{3\}$ i wszystkie układy pośrednie związane z obrotami składowymi. Na podstawie wykonanego rysunku napisać postać wynikowej macierzy rotacji \mathbf{R}_{3u}^0 .

- 1.8 Korzystając z funkcji `rotz`, `roty`, `rotx` obliczyć macierz rotacji \mathbf{R}_{3u}^0 i porównać ją z wyprowadzoną wyżej postacią. Wynik sprawdzić korzystając z funkcji `rpy2tr`. Zwizualizować orientację układu $\{3\}$ w układzie zerowym za pomocą funkcji `tr3d`.

- 1.9 Powtórzyć wszystkie powyższe operacje przyjmując teraz, że macierz \mathbf{R}_{3b}^0 wynika ze złożenia obrotów B1-B3 względem osi **układów bieżących**. Porównać otrzymaną macierz obrotu \mathbf{R}_{3b}^0 z macierzą \mathbf{R}_{3u}^0 . Zwizualizować orientację otrzymanego układu $\{3\}$ w układzie zerowym za pomocą funkcji `tr3d`.

- 1.10 Dana jest macierz obrotu:

$$\mathbf{R}_A^B \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Naszkieować orientację układu współrzędnych $\{A\}$ w układzie bazowym $\{B\}$.

- 1.11 Korzystając z funkcji `tr2eul` oraz `tr2rpy` obliczyć kąty Eulera odpowiadające zadanej orientacji \mathbf{R}_A^B . Zinterpretować otrzymane wyniki.

- 1.12 W oparciu o przeprowadzoną interpretację i korzystając z funkcji `rotz`, `roty`, `rotx` obliczyć ponownie macierz \mathbf{R}_A^B jako złożenie odpowiednich rotacji składowych.

2 Transformacje jednorodne

Transformacje jednorodne umożliwiają jednoznaczny i zwarty opis zarówno położenia jak i orientacji układu współrzędnych $\{A\}$ w układzie $\{B\}$ za pomocą następującej macierzy:

$$\mathbf{T}_A^B \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A^B & \mathbf{p}_A^B \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (10)$$

gdzie \mathbf{R}_A^B jest macierzą rotacji reprezentującą orientację osi układu $\{A\}$ w układzie $\{B\}$, zaś wektor $\mathbf{p}_A^B = [p_{Ax} \ p_{Ay} \ p_{Az}]^T$ reprezentuje położenie początku układu $\{A\}$ względem początku układu $\{B\}$. Przekształcenie punktu D^A , reprezentowanego we współrzędnych jednorodnych wektorem $\underline{\mathbf{d}}^A = [(\mathbf{d}^A)^T \ 1]^T = [d_x \ d_y \ d_z \ 1]^T$, do układu $\{B\}$ wynika teraz z następującej operacji:

$$\underline{\mathbf{d}}^B = \mathbf{T}_A^B \underline{\mathbf{d}}^A \Rightarrow \mathbf{d}^B = \mathbf{R}_A^B \mathbf{d}^A + \mathbf{p}_A^B.$$

Transformacja odwrotna, która reprezentuje orientację osi i położenie początku układu $\{B\}$ w układzie $\{A\}$ określona jest w następujący sposób:

$$\mathbf{T}_B^A = (\mathbf{T}_A^B)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_A^B)^T & -(\mathbf{R}_A^B)^T \mathbf{p}_A^B \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (11)$$

- 2.1** Dane są trzy układy współrzędnych: $\{B\}$, $\{S\}$ oraz $\{P\}$ oraz dany jest punkt reprezentowany przez wektor \mathbf{r}^P wyrażony w układzie współrzędnych P jako:

$$\mathbf{r}^P \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Relacje między poszczególnymi układami współrzędnych definiują następujące wektory i macierze:

$$\mathbf{d}_S^B \triangleq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_S^P \triangleq \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_S^B \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_S^P \triangleq \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{d} jest wektorem łączącym początki odpowiednich układów. Stosując formalizm transformacji jednorodnych obliczyć współrzędne wektora \mathbf{r}^B .

- 2.2** Korzystając z funkcji `tf3d` zwizualizować wszystkie układy współrzędnych na jednym wykresie (układ $\{B\}$ potraktować jako układ globalny) i sprawdzić poprawność uzyskanych wyników.

3 Zadanie kinematyki prostej i odwrotnej manipulatorów

Kinematyka zajmuje się analizą ruchu bez uwzględnienia sił wywołujących ten ruch. Badając ruch w sensie kinematycznym, rozpatrujemy jedynie położenie obiektów oraz pochodne położenia, tj. prędkość i przyspieszenie. W tym miejscu skupimy uwagę na kinematyce pozycji i orientacji (inaczej: na kinematyce położenia), które wynikają jedynie z geometrycznych (statycznych) własności manipulatorów o otwartych łańcuchach kinematycznych. Wyróżnia się dwa zadania kinematyki położenia:

- K1. zadanie kinematyki prostej położenia DKin** – polega ono na określeniu pozycji i orientacji układu współrzędnych końcówki roboczej manipulatora w postaci macierzy $\mathbf{T}_6^0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ względem układu globalnego (tu: zerowego) na podstawie zadanego zestawu wartości współrzędnych konfiguracyjnych $\mathbf{q} = [q_1 \ \dots \ q_6]^T \in \mathbb{R}^6$ manipulatora:

$$\text{DKin: } \mathbf{q} \mapsto \mathbf{T}_6^0, \quad (12)$$

K2. zadanie kinematyki odwrotnej położenia IKin – polega ono na określeniu zestawu wartości współrzędnych konfiguracyjnych $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_6]^T \in \mathbb{R}^6$ manipulatora odpowiadających zadanej pozycji i orientacji układu współrzędnych końcówki roboczej manipulatora w postaci macierzy $\mathbf{T}_6^0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ względem układu globalnego (tu: zerowego):

$$\text{IKin: } \mathbf{T}_6^0 \mapsto \mathbf{q}. \quad (13)$$

Zadanie kinematyki prostej daje zawsze jednoznaczne rozwiązanie. Natomiast zadanie odwrotne kinematyki może mieć kilka rozwiązań w przestrzeni zmiennych konfiguracyjnych. Może się zdarzyć także, że rozwiązań tych będzie nieskończenie wiele, bądź rozwiązanie nie będzie istnieć w zbiorze liczb rzeczywistych. Takie sytuacje mają miejsce w tzw. punktach osobliwych odwzorowania kinematyki.

Kluczowe znaczenie dla problemu kinematyki położenia posiada macierz przekształcenia \mathbf{T}_6^0 związana z końcówką roboczą. Wyznaczenie postaci tej macierzy jako funkcji współrzędnych konfiguracyjnych dla danego manipulatora wymaga zdefiniowania i przywiązania układów współrzędnych do poszczególnych ogniw łańcucha manipulatora oraz określenia składowych macierzy transformacji $\mathbf{T}_i^j(\mathbf{q})$ definiujących układ i -tego ogniwa w układzie j -tym. Wypadkowa macierz reprezentująca położenie końcówki w układzie zerowym (globalnym) dla manipulatora 6-DOF z parami kinematycznymi klasy piątej² wynika z następującego złożenia:

$$\mathbf{T}_6^0(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_1^0(q_1) \mathbf{T}_2^1(q_2) \dots \mathbf{T}_i^j(q_i) \dots \mathbf{T}_6^5(q_6). \quad (14)$$

Jednym z systematycznych sposobów definiowania i przywiązywania układów współrzędnych do ogniw manipulatora jest notacja Denavita i Hartenberga (w skrócie: notacja D-H). Pozwala ona na jednoznaczny wybór położenia początku O i ustalenia orientacji osi X, Y, Z i -tego układu współrzędnych w szeregowym łańcuchu kinematycznym, a także definiuje cztery podstawowe parametry kinematyczne: długość ogniwa a_i , kąt skręcenia ogniwa α_i , odsunięcie przegubu d_i oraz kąt obrotu ogniwa (kąt przegubu) θ_i .

Notacja D-H stosuje trzy podstawowe zasady związane z przyporządkowaniem i -tego układu współrzędnych:

- I. oś Z_i układu i -tego pokrywa się z osią przegubu $i + 1$,
- II. oś X_i układu i -tego jest prostopadła do osi Z_{i-1} oraz Z_i i jest skierowana od przegubu i do przegubu $i + 1$,
- III. oś Y_i uzupełnia prawoskrętny układ współrzędnych.

Parametry kinematyczne mają w notacji D-H następujące definicje:

a_i – odległość wzdłuż osi X_i od początku O_i do przecięcia osi X_i oraz Z_{i-1} ,

d_i – odległość wzdłuż osi Z_{i-1} od początku O_{i-1} do przecięcia osi X_i oraz Z_{i-1} (jeśli przegub jest przyrzedkowy, to d_i jest zmienną przegubową),

α_i – kąt między osiami Z_{i-1} oraz Z_i mierzony wokół osi X_i ,

θ_i – kąt między osiami X_{i-1} oraz X_i mierzony wokół osi Z_{i-1} (jeśli przegub jest obrotowy, to θ_i jest zmienną przegubową).

²Są to połączenia o jednym stopniu swobody dla dwóch sąsiadujących ogniw, w postaci obrotu lub przesuwu wzdłuż wybranej osi w przestrzeni.

Przy tak zdefiniowanych parametrach i układach współrzędnych przywiązanych zgodnie z notacją D-H, macierz przekształcenia jednorodnego $\mathbf{T}_i^j(q_i)$ przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{T}_i^j(q_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

gdzie $q_i \equiv \theta_i$ dla przegubu obrotowego lub $q_i \equiv d_i$ dla przegubu pryzmatycznego.

Algorytm definiowania i przywiązywania układów współrzędnych do poszczególnych ogniów manipulatora o n stopniach swobody, a także sposób określania macierzy przekształceń jednorodnych dla notacji D-H można przedstawić w postaci kilku następujących kroków:

Krok 1: Umieścić i oznaczyć osie przegubów Z_0, \dots, Z_{n-1} zgodnie z zasadą I.

Krok 2: Przyjąć bazowy układ współrzędnych. Jego początek O_0 umieścić dowolnie na osi Z_0 . Osie X_0 i Y_0 wybrać tak, aby układ był prawoskrętny. Dla $i = 1, \dots, n - 1$ wykonać kroki 3, 4, 5.

Krok 3: Umieścić środek O_i w miejscu, gdzie wspólna normalna do osi Z_i i Z_{i-1} przecina oś Z_i . Jeśli oś Z_i przecina oś Z_{i-1} , to umieść początek O_i w tym przecięciu. Jeśli Z_i i Z_{i-1} są równoległe, to umieść O_i na przegubie i .

Krok 4: Przyjąć oś X_i wzdłuż wspólnej normalnej osi Z_{i-1} i Z_i przechodzącej przez początek O_i lub w kierunku normalnej do płaszczyzny obu tych osi, jeśli Z_{i-1} i Z_i przecinają się.

Krok 5: Wybrać oś Y_i tak, aby układ był prawoskrętny.

Krok 6: Ustalić układ współrzędnych końcówki roboczej $O_n X_n Y_n Z_n$. Zakładając, że oś Z_n jest obrotowa, przyjąć wersor \mathbf{a} wzdłuż kierunku osi Z_{n-1} . Wybrać początek O_n na osi Z_n (preferowany jest środek chwytaka lub czubek narzędzia, z którym pracuje robot). Przyjąć wersor \mathbf{o} w kierunku zamykania chwytaka oraz \mathbf{n} jako $\mathbf{n} = \mathbf{o} \times \mathbf{a}$ (jeśli narzędzie nie jest zwykłym chwytakiem, przyjąć wersory \mathbf{n} i \mathbf{o} według uznania zachowując zasady układu prawoskrętnego).

Krok 7: Utworzyć tabelę parametrów kinematycznych $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$ (zgodnie z definicjami w notacji D-H).

Krok 8: Obliczyć macierze przekształceń jednorodnych $\mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)$ według wzoru (15).

Krok 9: Korzystając ze złożenia (14) obliczyć macierz $\mathbf{T}_0^n(\mathbf{q})$ opisującą pozycję i orientację układu końcówki roboczej w układzie bazowym.

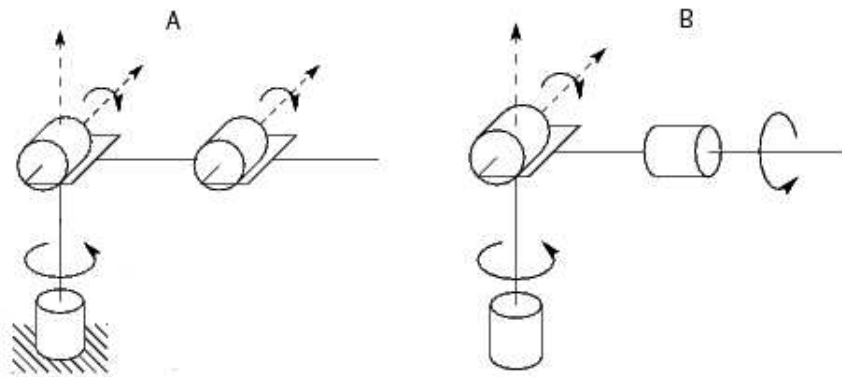
Pakiet *Robotics Toolbox* zawiera funkcje `link` oraz `robot` pozwalające na definicję struktury kinematycznej manipulatora na podstawie tabeli parametrów kinematycznych zdefiniowanych zgodnie z notacją D-H. Inne dostępne funkcje takie, jak `fkine`, `ikine` pozwalają na rozwiązanie odpowiednio zadania prostego i odwrotnego kinematyki dla zdefiniowanej uprzednio struktury manipulatora. Szczegółowy opis działania i wywołania tych funkcji oraz innych przydatnych skryptów pakietu *Robotics Toolbox* zawiera dokumentacja [2] oraz podręczna pomoc środowiska Matlab.

- 3.1 Zapoznać się z opisem następujących funkcji pakietu *Robotics Toolbox*: `link`, `puma560`, `robot`, `drivebot`, `robot/plot`, `jtraj`, `fkine` (patrz [2, 1]).
- 3.2 Dane są dwie struktury manipulatorów 3R o trzech stopniach swobody jak na rys. 3 (manipulator z łokciem i kiść sferyczna). Dla każdego z manipulatorów utworzyć tabele parametrów kinematycznych $\alpha_i, a_i, \theta_i, d_i$ zgodnie z konwencją opisu kinematyki wg Denavita i Hartenberga.
- 3.3 Korzystając z funkcji `link` oraz `robot` utworzyć modele kinematyczne obu manipulatorów w przestrzeni roboczej Matlaba.
- 3.4 Korzystając z funkcji `fkine` rozwiązać zadanie proste kinematyki obu manipulatorów dla następującego zestawu zmiennych konfiguracyjnych:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

Przeprowadzić wizualizacje położenia efektora końcowego każdego manipulatora dla powyższych zmiennych konfiguracyjnych (funkcja `plot(robot,q)`) i sprawdzić wyniki obliczeń funkcji `fkine`.

- 3.5 Korzystając z funkcji `jtraj` wygenerować macierz trajektorii wielomianowych $\mathbf{Q}(t) = [\mathbf{q}_1(t) \ \mathbf{q}_2(t) \ \mathbf{q}_3(t)]$ dla poszczególnych złączy manipulatora z łokciem (w wywołaniu funkcji `jtraj` przyjąć $N=200$ punktów pośrednich). Przeprowadzić wizualizację ruchu manipulatora dla wygenerowanych trajektorii z złączach (funkcja `plot(robot,Q)`).



Rys. 3: Przykładowe struktury manipulatorów 3R: manipulator z łokciem (A), kiść sferyczna (B).

- 3.6 Zapoznać się z opisem następujących funkcji pakietu *Robotics Toolbox*: `ctrjaj`, `ikine`, `ikine560` (patrz [2, 1]).
- 3.7 Do przestrzeni roboczej Matlaba wprowadzić strukturę manipulatora Puma 560 (funkcja `puma560`) i wykreślić ją w oknie graficznym dla zerowych kątów konfiguracyjnych (funkcja `plot(p560,qz)`). Korzystając z polecenia `drivebot` przemieścić manipulator i zapamiętać dwie lokalizacje manipulatora w przestrzeni kartezjańskiej: \mathbf{T}_0 oraz \mathbf{T}_1 (bieżące wartości kątów konfiguracyjnych manipulatora można odczytać stosując polecenie `q=plot(p560)`).
- 3.8 Napisać skrypt, który będzie realizował (wizualizował) ruch manipulatora pomiędzy zapamiętanymi lokalizacjami: początkową \mathbf{T}_0 i końcową \mathbf{T}_1 (przyjąć sto lokalizacji pośrednich – do interpolacji trajektorii pomiędzy zapamiętanymi lokalizacjami w przestrzeni kartezjańskiej wykorzystać funkcję `ctrjaj`).

Literatura

- [1] P.I. Corke. A robotics toolbox for MATLAB. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 3(1):24–32, Marzec 1996.
- [2] P.I. Corke. *Robotics Toolbox for MATLAB*. CSIRO Manufacturing and Technology, 2001.
- [3] K. Kozłowski, P. Dutkiewicz, W. Wróblewski. *Modelowanie i sterowanie robotów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- [4] M. W. Spong, M. Vidyasagar. *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.